（一）附录 1：算法 1 的证明

对于条件前向滤波 $a_t(j)$，在 $t=1$ 时，显然有

$a_1(j)=\mathrm{p}\left(y_1,r_1=j\middle|\boldsymbol{y}_{1-p}^{0}\right)=\pi_j f\left(y_1\middle|j\right)$。

对 $t\geq 2$， $\forall j\in\{1,\cdots,K\}$， 有

$$\mathrm{p}\left(r_t=j\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)=\frac{\mathrm{p}\left(y_{t-1},r_t=j\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-2}\right)}{\mathrm{p}\left(y_{t-1}\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-2}\right)}=\frac{\mathrm{p}\left(y_{t-1},r_t=j\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-2}\right)}{\sum_{k=1}^{K}\mathrm{p}\left(y_{t-1},r_t=k\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-2}\right)}$$

上式中，

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\left(y_{t-1},r_t=j\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-2}\right)&=\sum_{i=1}^{K}\mathrm{p}\left(y_{t-1},r_{t-1}=i\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-2}\right)\mathrm{p}\left(r_t=j\middle|r_{t-1}=i,\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)\\&=\sum_{i=1}^{K}\mathrm{p}\left(y_{t-1},r_{t-1}=i\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-2}\right)\mathrm{p}\left(r_t=j\middle|r_{t-1}=i\right)\\&=\sum_{i=1}^{K}a_{t-1}(i)s_{t-1}(i,j)\end{aligned}$$

综合以上，即得

$$\begin{aligned}a_t(j)&=\mathrm{p}\left(y_t,r_t=j\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)=\mathrm{p}\left(r_t=j\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)\mathrm{p}\left(y_t\middle|r_t=j,\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)\\&=\frac{\sum_{i=1}^{K}a_{t-1}(i)s_{t-1}(i,j)}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{K}a_{t-1}(i)s_{t-1}(i,k)}f\left(y_t\middle|j\right)\text{。}\end{aligned}$$

对于条件后向滤波 $b_t(j)$，在 $t=T$ 时，令 $b_T(j)=1,\ \forall j\in\{1,\cdots,K\}$；在 $t=T-1$ 时，有

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\left(y_T,r_T=i\middle|r_{T-1}=j,\boldsymbol{y}_1^{T-1}\right)&=\mathrm{p}\left(r_T=i\middle|r_{T-1}=j,\boldsymbol{y}_1^{T-1}\right)\mathrm{p}\left(y_T\middle|r_T=i,r_{T-1}=j,\boldsymbol{y}_1^{T-1}\right)\\&=s_{T-1}(j,i)f\left(y_T\middle|i\right),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}b_{T-1}(j)&=\sum_{i=1}^{K}\mathrm{p}\left(y_T,r_T=i\middle|r_{T-1}=j,\boldsymbol{y}_1^{T-1}\right)\\&=\sum_{i=1}^{K}s_{T-1}(j,i)f\left(y_T\middle|i\right)=\sum_{i=1}^{K}s_{T-1}(j,i)b_T(i)f\left(y_T\middle|i\right)\text{；}\end{aligned}$$

对 $t\leq T-2$， $\forall j\in\{1,\cdots,K\}$， 有

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_{t+1}^{T}\middle|r_{t+1}=i,\boldsymbol{y}_1^{t}\right)&=\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_{t+2}^{T}\middle|r_{t+1}=i,\boldsymbol{y}_1^{t+1}\right)\mathrm{p}\left(y_{t+1}\middle|r_{t+1}=i,\boldsymbol{y}_1^{t}\right)\\&=b_{t+1}(i)f\left(y_{t+1}\middle|i\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_{t+1}^{T},r_{t+1}=i\middle|r_t=j,\boldsymbol{y}_1^{t}\right)&=\mathrm{p}\left(r_{t+1}=i\middle|r_t=j,\boldsymbol{y}_1^{t}\right)\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_{t+1}^{T}\middle|r_{t+1}=i,r_t=j,\boldsymbol{y}_1^{t}\right)\\&=\mathrm{p}\left(r_{t+1}=i\middle|r_t=j\right)\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_{t+1}^{T}\middle|r_{t+1}=i,\boldsymbol{y}_1^{t}\right)\\&=s_t(j,i)b_{t+1}(i)f\left(y_{t+1}\middle|i\right)\end{aligned}$$

故

$$b_t(j)=\sum_{i=1}^{K}\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_{t+1}^{T},r_{t+1}=i\middle|r_t=j,\boldsymbol{y}_1^{t}\right)=\sum_{i=1}^{K}s_t(j,i)b_{t+1}(i)f\left(y_{t+1}\middle|i\right)。$$

（二）附录 2：推论 2 的证明

对 $t=1,\ldots,T$， $\forall j\in\{1,\ldots,K\}$， 有

$$a_t(j)b_t(j)=\mathrm{p}\left(y_t,r_t=j\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_{t+1}^{T}\middle|r_t=j,\boldsymbol{y}_1^{t}\right)=\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_t^{T},r_t=j\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)$$

故

$$\zeta_t(j)=\mathrm{p}\left(r_t=j\mid\boldsymbol{y}\right)=\frac{\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_t^{T},r_t=j\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)}{\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_t^{T}\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)}=\frac{a_t(j)b_t(j)}{\sum_{k=1}^{K}a_t(k)b_t(k)}。$$

对于 $t=1,\ldots,T-1$， $\forall i,j\in\{1,\ldots,K\}$， 有

$$\begin{aligned}&a_t(i)s_t(i,j)f\left(y_{t+1}\mid j\right)b_{t+1}(j)\\&=\mathrm{p}\left(y_t,r_t=i\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)\mathrm{p}\left(r_{t+1}=j\middle|r_t=i\right)\mathrm{p}\left(y_{t+1}\middle|r_{t+1}=j,\boldsymbol{y}_{t-p+1}^{t}\right)\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_{t+2}^{T}\middle|r_{t+1}=j,\boldsymbol{y}_1^{t+1}\right)\\&=\mathrm{p}\left(y_t,r_t=i\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)\mathrm{p}\left(r_{t+1}=j\middle|r_t=i,\boldsymbol{y}_1^{t}\right)\mathrm{p}\left(y_{t+1}\middle|r_{t+1}=j,r_t=i,\boldsymbol{y}_1^{t}\right)\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_{t+2}^{T}\middle|r_{t+1}=j,r_t=i,\boldsymbol{y}_1^{t+1}\right)\\&=\mathrm{p}\left(r_t=i,r_{t+1}=j,\boldsymbol{y}_t^{T}\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\xi_t(i,j)&=\mathrm{p}\left(r_t=i,r_{t+1}=j\middle|\boldsymbol{y}\right)\\&=\frac{\mathrm{p}\left(r_t=i,r_{t+1}=j,\boldsymbol{y}_t^{T}\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)}{\mathrm{p}\left(\boldsymbol{y}_t^{T}\middle|\boldsymbol{y}_1^{t-1}\right)}\\&=\frac{a_t(i)s_t(i,j)f\left(y_{t+1}\middle|j\right)b_{t+1}(j)}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K}a_t(k)s_t(k,m)f\left(y_{t+1}\middle|m\right)b_{t+1}(m)}。\end{aligned}$$

（三）附表 1

附表 1 气候校准 NHMS-AR 模型中气候因子的有效性及参数估计结果

			M1		M2		M3	
			状态 I	状态 II	状态 I	状态 II	状态 I	状态 II
气候因子	非齐次转移概率矩阵中的	$EAWR^{ma(6)}$	0.014	0.036			0.024	0.211
			(0.350)	(0.309)			(0.347)	(0.310)
		$EAWR^{ma(9)}$	0.017	0.087			0.018	−0.121
			(0.434)	(0.374)			(0.427)	(0.374)
		$EAWR^{diff(12)}$	**0.133 ****	0.070			0.086	**0.102 ***
			(0.064)	(0.056)			(0.063)	**(0.057)**
		$NAO^{ma(12)}$	**0.819 *****	0.349			**0.994 *****	0.060
			(0.293)	(0.239)			**(0.297)**	(0.249)
		PNA	−0.029	−0.090			0.032	−0.050
			(0.125)	(0.111)			(0.124)	(0.110)
		$PNA^{ma(3)}$	0.228	**0.334 ***			0.053	0.172
			(0.204)	**(0.178)**			(0.201)	(0.176)
		$PWAA^{diff(9)}$	**1.000 ****	**1.174 *****			**1.383 *****	**1.298 *****

		(0.504)	**(0.452)**		**(0.499)**	**(0.456)**
	$\widetilde{PWAA}^{diff(9)}$	**−2.233 *****	−0.734		**−1.625 ****	−0.423
		(0.740)	(0.649)		**(0.731)**	(0.645)
	$SOI^{ma(6)}$	−0.650	−0.353		**−0.727 ***	−0.110
		(0.409)	(0.388)		**(0.400)**	(0.401)
	$SOI^{ma(9)}$	**1.034 ****	0.607		**1.039 ****	0.318
		(0.453)	(0.436)		**(0.444)**	(0.446)
	$TNA^{ma(6)}$	0.504	0.071		**1.016 *****	−0.320
		(0.369)	(0.331)		**(0.375)**	(0.344)
	$WP^{ma(3)}$	**0.574 *****	**0.356 *****		**0.303 ***	0.177
		(0.160)	**(0.138)**		**(0.157)**	(0.140)
	$\widetilde{WP}^{ma(3)}$	−0.191	−0.140		0.075	0.096
		(0.218)	(0.195)		(0.215)	(0.194)
	$WP^{ma(12)}$	0.074	−0.038		0.052	−0.160
		(0.303)	(0.257)		(0.301)	(0.260)
	$\widetilde{WP}^{ma(12)}$	0.681	0.011		0.558	−0.097
		(0.425)	(0.366)		(0.422)	(0.370)
波动率系统性成分中的气候因子	$AO^{ma(6)}$			−0.011	−0.011	
				(0.012)	(0.012)	
	$\widetilde{AO}^{ma(6)}$			0.014	0.014	
				(0.016)	(0.016)	
	$EAWR$			**−0.024 *****	**−0.026 *****	
				(0.005)	**(0.005)**	
	$NAO^{ma(9)}$			**0.044 *****	**0.065 *****	
				(0.015)	**(0.017)**	
	$\widetilde{NAO}^{ma(9)}$			**−0.035 ***	**−0.036 ***	
				(0.019)	**(0.020)**	
	$NAO^{diff(1)}$			−0.003	−0.002	
				(0.004)	(0.004)	
	$NAO^{diff(9)}$			0.005	0.003	
				(0.004)	(0.004)	
	$\widetilde{NAO}^{diff(9)}$			0.006	0.006	
				(0.006)	(0.006)	
	$PWAA^{diff(1)}$			−0.025	−0.025	
				(0.067)	(0.067)	
	$\widetilde{PWAA}^{diff(1)}$			0.129	0.103	
				(0.093)	(0.094)	
	$PWAA^{diff(3)}$			**0.082 ****	**0.084 ***	
				(0.041)	**(0.043)**	
	$SOI^{diff(12)}$			0.003	0.003	
				(0.004)	(0.004)	
	TNA			**0.090 *****	**0.126 *****	
				(0.015)	**(0.017)**	
	WP			0.000	0.002	
				(0.005)	(0.005)	
总体参数自由度		#69		#53	#83	
对数似然值		−40595.37		−40567.40	−40539.21	
AIC / BIC		81328.74 / 81883.71		81240.80 / 81667.08	81244.42 / 81911.99	
似然比检验		34.476 [0.262]		90.415 [0.000] ***	146.797 [0.000] ***	

注：气候因子参数估计结果中，小括号内为参数估计的标准误，***、**、*分别代表 1%、5%、10%显著性水平；显著非零项以加粗强调，对应的气候因子以浅灰色底色强调。模型整体评价结果中，似然比检验的基准模型（受约束模型）为不含有气候因子的两状态模型，即 M0，模型参数自由度 39；方括号外的数字为似然比统计量，方括号内为卡方 p 值。

（四）附表 2

附表 2 不同误差分布假定下单状态及多状态随机气温模型的 AIC 评价结果

单状态模型						
分布假定	***st***	*sn*	*t*	*n*		
AIC	**82026.39**	82477.76	83575.55	84270.33		
双状态模型						
分布假定	***2st***	*sn+st*	*2sn*	*n+sn*	*sn+t*	*n+st*
AIC	**81303.31**	81350.48	81412.45	81698.43	81761.18	81778.65
分布假定	*t+st*	*2t*	*n+t*	*2n*		
AIC	81782.15	82856.94	82948.36	82968.06		
三状态模型						
分布假定	***3st***	*sn+2st*	*2sn+st*	*3sn*	*t+2st*	*n+2st*
AIC	**81066.88**	81103.14	81113.39	81152.35	81165.69	81199.73
分布假定	*n+sn+st*	*sn+t+st*	*2sn+t*	*n+2sn*	*2t+st*	*2n+st*
AIC	81218.80	81236.85	81241.11	81283.92	81510.04	81537.98
分布假定	*n+t+st*	*2n+sn*	*n+sn+t*	*sn+2t*	*n+2t*	*3t*
AIC	81539.84	81560.79	81564.34	81567.96	82589.47	82596.24
分布假定	*2n+t*	*3n*				
AIC	82617.00	82625.43				

注：符号缩写 *n*、*sn*、*t*、*st* 分别表示正态、偏正态、学生 *t* 和偏学生 *t* 分布，“*sn+2st*”表示三状态模型选取 1 个偏正态分布和 2 个偏学生 *t* 分布作为各状态的误差假定，以此类推；AIC 准则下的最优模型使用加粗表示。

（五）附表 3

附表 3 气候较准 NHMS-AR 气温模型的整体评价与比较

模型	M0	M1	M2	M3
总体参数自由度	#39	#55	#44	#60
对数似然值	−40612.66	−40595.37	−40567.40	−40539.21
AIC	81303.31	81300.74	81222.80	81198.42
BIC	81616.99	81743.11	81576.69	81681.00
似然比检验	—	34.48 [0.005]***	90.42 [0.000]***	146.80 [0.000]***

注：似然比检验的基准模型（受约束模型）为不含有气候因子的两状态模型 M0，方括号外的数字为似然比统计量，方括号内为卡方检验 p 值。